Решения задач из части С III онлайн - турнира на

ALEXLARIN.COM

С1. Найдите все решения уравнения

$5\sin^2 2x + 8\cos^3 x = 8\cos x,$

удовлетворющее условию $x \in \left[\dfrac{3\pi}{2}; 2\pi\right]$

$5\sin^2 2x + 8\cos^3 x - 8\cos x = 0$

$5\sin^2 2x + 8\cos x(\cos^2 x - 1) = 0$

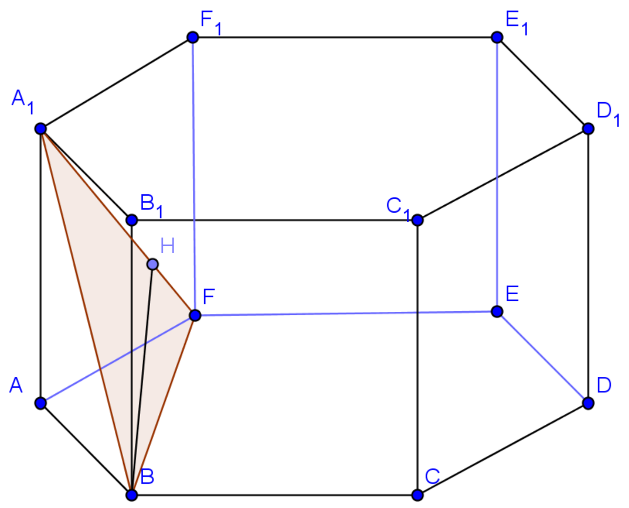
$20\sin^2 x\cos^2 x - 8\cos x\sin^2 x = 0$

$4\cos x\sin^2 x(5\cos x - 2) = 0$

$\cos x = 0$	или	$\sin x = 0$	или	$\cos x = \dfrac{2}{5}$
$x = \dfrac{\pi}{2} + \pi n, n \in Z$		$x = \pi k, k \in Z$		$x = \pm\arccos\dfrac{2}{5} + 2\pi m, m \in Z$
$\dfrac{3\pi}{2} \le \dfrac{\pi}{2} + \pi n \le 2\pi$		$\dfrac{3\pi}{2} \le \pi k \le 2\pi$		$\dfrac{3\pi}{2} \le \pm\arccos\dfrac{2}{5} + 2\pi m \le 2\pi$
$1 \le n \le 1,5$		$\dfrac{3}{2} \le k \le 2$		
$n = 1$		$k = 2$		$m = 1$
$x = \dfrac{3\pi}{2}$		$x = 2\pi$		$x = 2\pi - \arccos\dfrac{2}{5}$

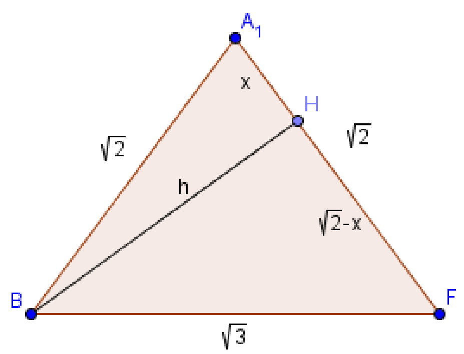
Ответ: $\dfrac{3\pi}{2}; 2\pi;\ 2\pi - \arccos\dfrac{2}{5}.$

C2. В правильной шестиугольной призме $ABCDEFA_1B_1C_1D_1E_1F_1$, все рёбра которой равны 1, найдите расстояние от точки B до прямой FA_1.



Чтобы найти расстояние от точки B до прямой FA_1, нам необходимо найти длину высоты треугольника BFA_1.

В этом треугольнике легко найти стороны: $BF=\sqrt{3}$, $FA_1= BA_1= \sqrt{2}$.



BH=h - высота. Пусть $A_1H=x$, тогда $FH=\sqrt{2}-x$.

Тогда можем составить систему уравнений с использованием теоремы Пифагора

$$\begin{cases} h^2+x^2=2 \\ h^2+(\sqrt{2}-x)^2=3 \end{cases},$$ решением которой являются $x=\dfrac{1}{2\sqrt{2}}; h=\dfrac{\sqrt{30}}{4}$

Значит, расстояние от точки B до прямой FA_1 равно $\dfrac{\sqrt{30}}{4}$.

C3. Решить систему неравенств: $\begin{cases} |3x+1|+2+\dfrac{3}{|3x+1|-2} \le \dfrac{1}{|3x+1|+2} \\ |3x+1|+\sqrt{3x+4} \le 3 \end{cases}$

Введем новые переменные

$p = 3x+1; \quad t = |p|; \quad t = |3x+1|, t \ge 0$

$1) t+2+\dfrac{3}{t-2}-\dfrac{1}{t+2} \le 0$

$$\frac{(t+2)^2(t-2)+3(t+2)-(t-2)}{(t+2)(t-2)} \le 0$$

$$\frac{t^3+2t^2-2t}{(t+2)(t-2)} \le 0$$

$$\frac{t(t+1+\sqrt{3})(t+1-\sqrt{3})}{(t+2)(t-2)} \le 0$$

$t \in \{0\} \cup [-1+\sqrt{3};2) \Rightarrow p \in (-2;1-\sqrt{3}] \cup \{0\} \cup [-1+\sqrt{3};2)$

$2) |p|+\sqrt{p+3} \le 3$

$\sqrt{p+3} \le 3-|p|$

$\begin{cases} 0 \le p \le 3 \\ p+3 \le p^2-6p+9 \end{cases}$ или $\begin{cases} -3 \le p < 0 \\ p+3 \le p^2+6p+9 \end{cases}$

$\begin{cases} 0 \le p \le 3 \\ p^2-7p+6 \ge 0 \end{cases}$ $\qquad \begin{cases} -3 \le p < 0 \\ p^2+5p+6 \ge 0 \end{cases}$

$\begin{cases} 0 \le p \le 3 \\ (p-1)(p-6) \ge 0 \end{cases}$ $\qquad \begin{cases} -3 \le p < 0 \\ (p+2)(p+3) \ge 0 \end{cases}$

$p \in [0;1]$ $\qquad p \in [-2;0) \cup \{-3\}$

Значит, $p \in [-2;1] \cup \{-3\}$

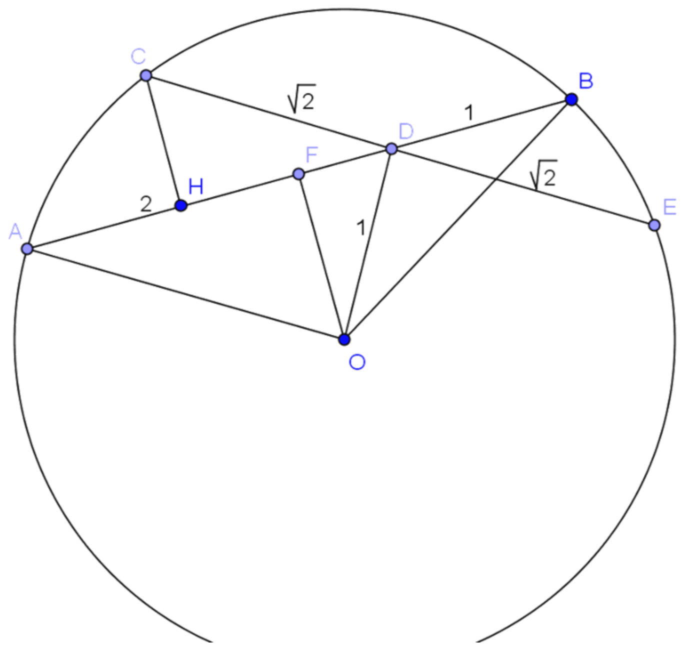
3)Подводим итог: Пересекая промежутки, полученные для первого и второго неравенств, получаем

$p \in (-2;1-\sqrt{3}] \cup \{0\} \cup [-1+\sqrt{3};1]$

Ну и, возвращаясь к исходной переменной, получаем

$$x \in (-1;-\frac{\sqrt{3}}{3}] \cup \left\{-\frac{1}{3}\right\} \cup [\frac{\sqrt{3}-2}{3};0].$$

C4. Хорда *AB* стягивает дугу окружности, равную 120°. Точка *C* лежит на этой дуге, а точка *D* лежит на хорде *AB*. При этом $AD = 2$, $BD = 1$, $DC = \sqrt{2}$. Найти площадь треугольника *ABC*.



Сначала найдем радиус окружности. Проведем

$$OF \perp AB, F - \text{середина } AB$$

$$AF = \frac{3}{2}; \angle AOF = 60^\circ \Rightarrow R = \frac{1{,}5}{\sin 60^\circ} = \sqrt{3}$$

Продолжим отрезок CD до пересечения с окружностью в точке E.

По свойству пересекающихся хорд

$$AD \cdot DB = CD \cdot DE$$

$$DE = \sqrt{2}$$

$\triangle COE$ – равнобедренный, OD- медиана, высота

$$OD = \sqrt{OE^2 - DE^2} = \sqrt{3-2} = 1$$

$\triangle ODB$ – *равнобедренный*

$$\angle ABO = \angle DOB = 30^\circ \Rightarrow \angle BDE = 30^\circ = \angle CDH$$

$$CH = \sqrt{2}\sin 30^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} AB \cdot CH = \frac{3\sqrt{2}}{4}.$$

C5. Найти все a, при которых среди корней уравнения $\sin 2x+6a\cos x-\sin x-3a=0$ найдутся два, удалённые друг от друга на расстояние $\frac{3\pi}{2}$?

$\sin 2x+6a\cos x-\sin x-3a=0$

$2\sin x\cos x+6a\cos x-\sin x-3a=0$

$\sin x(2\cos x-1)+3a(2\cos x-1)=0$

$(2\cos x-1)(\sin x+3a)=0$

$\cos x=\frac{1}{2}$ или $\sin x=-3a$

Так как расстояние между корнями равно $\frac{3\pi}{2}$, то ввиду того, что между корнями первого уравнения расстояния $\frac{2\pi}{3}$ или $\frac{4\pi}{3}$, то возможны два случая

1)корни уравнения $\sin x=-3a$ расположены на расстоянии $\frac{3\pi}{2}$ от корней уравнения $\cos x=\frac{1}{2}$, тогда

$x_1=\frac{\pi}{3}\pm\frac{3\pi}{2}$ или $x_2=-\frac{\pi}{3}\pm\frac{3\pi}{2}$

тогда корни можно записать как $x_0=\pm\frac{\pi}{6}+\pi m$

$\sin x_0=\pm\frac{1}{2}$, значит $a=\pm\frac{1}{6}$

2) корни уравнения $\sin x=-3a$ находятся на расстоянии $\frac{3\pi}{2}$ друг от друга

тогда $\sin x_4=\sin(x_3\pm\frac{3\pi}{2})=\pm\cos x_3$

Значит, $\sin x_4=\pm\frac{\sqrt{2}}{2}=-3a\Rightarrow a=\pm\frac{\sqrt{2}}{6}$

Ответ: $\pm\frac{1}{6};\pm\frac{\sqrt{2}}{6}$

С6. Четырехзначное число, являющееся полным квадратом, обладает следующим свойством: если все его цифры уменьшить на одно и то же число, то получится четырехзначное число, также являющееся полным квадратом. Найти все такие числа с описанным свойством.

Пусть первое число $x^2 = 1000a + 100b + 10c + d$, тогда второе число можно записать следующим образом: $y^2 = 1000(a-n) + 100(b-n) + 10(c-n) + (d-n)$

Рассмотрим разность

$$x^2 - y^2 = 1111n = 101 \cdot 11n$$
$$(x-y)(x+y) = 101 \cdot 11n$$

Из условия следует, что $32 \le x, y \le 99$, тогда $\begin{matrix} 64 \le x+y \le 198 \\ 0 \le x-y \le 67 \end{matrix}$.

Значит, $\begin{matrix} x+y = 101 \\ x-y = 11n \end{matrix}$

Так как $(x+y)$-нечётное, то и $(x-y)$-так же нечётное.

Значит, $n=1;3;5$

$$\begin{cases} x+y=101 \\ x-y=11 \end{cases} \quad \begin{cases} x+y=101 \\ x-y=33 \end{cases} \quad \begin{cases} x+y=101 \\ x-y=55 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x=56 \\ y=45 \end{cases} \text{ или } \begin{cases} x=67 \\ y=34 \end{cases} \text{ или } \begin{cases} x=78 \\ y=23 \end{cases}$$

В последней системе переменная y не удовлетворяет условию.

Следовательно, описанному свойству удовлетворяют пары чисел 3136 и 2025; 4489 и 1156.

C7. (бонус): Решить систему неравенств: $\begin{cases} 4^{\frac{x^2-2}{x^2+x+1}} + 3\cdot 6^{\frac{x^2-2}{x^2+x+1}} \ge 4\cdot 9^{\frac{x^2-2}{x^2+x+1}} \\ \log_{\frac{1}{3}}|x-2| - \log_{2-x} 3 \le 2 \end{cases}$

1) $4^{\frac{x^2-2}{x^2+x+1}} + 3\cdot 6^{\frac{x^2-2}{x^2+x+1}} \ge 4\cdot 9^{\frac{x^2-2}{x^2+x+1}}$

Пусть $t = \dfrac{x^2-2}{x^2+x+1}$

$4^t + 3\cdot 6^t - 4\cdot 9^t \ge 0$

так как $9^t > 0$, то при делении неравенства на 9^t получаем

$$\left(\frac{2}{3}\right)^{2t} + 3\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^t - 4 \ge 0$$

$$\left(\left(\frac{2}{3}\right)^t + 4\right)\left(\left(\frac{2}{3}\right)^t - 1\right) \ge 0$$

$$\left(\frac{2}{3}\right)^t \ge 1 \Rightarrow t \le 0$$

$$\frac{x^2-2}{x^2+x+1} \le 0$$

Так как $x^2+x+1>0$ при любом $x\in R$,

$(x-\sqrt{2})(x+\sqrt{2}) \le 0$

$x \in [-\sqrt{2}; \sqrt{2}]$

2) $\log_{\frac{1}{3}}|x-2| - \log_{2-x} 3 \le 2$

ОДЗ: $2-x>0$

$2-x \ne 1$

$x \in (-\infty; 1) \cup (1; 2)$

На ОДЗ неравенство принимает вид

$-\log_3(2-x) - \log_{2-x} 3 \le 2$

Принимая во внимание,что $\log_{2-x} 3 = \dfrac{1}{\log_3(2-x)}$,

можем сделать замену $\log_3(2-x) = m$

$$m + \frac{1}{m} \ge -2$$

$$\frac{m^2+2m+1}{m} \ge 0$$

$$\frac{(m+1)^2}{m} \geq 0$$

$m \in \{-1\} \cup (0;+\infty)$

$\log_3(2-x) = -1$ или $\log_3(2-x) > 0$

$2 - x = \frac{1}{3}$ $\qquad 2 - x > 1$

$x = \frac{5}{3}$ $\qquad x < 1$

учитывая ОДЗ, получаем, что $x \in (-\infty;1) \cup \left\{\frac{5}{3}\right\}$

3) А теперь находим пересечение решений первого и второго неравенств.

Учитывая $\frac{5}{3} > \sqrt{2}$, получаем, что

$x \in [-\sqrt{2};1)$

Ответ: $x \in [-\sqrt{2};1)$