

C1. Найдите все решения уравнения

$$5 \sin^2 2x + 8 \cos^3 x = 8 \cos x,$$

$$\text{удовлетворяющее условию } x \in \left[\frac{3\pi}{2}; 2\pi \right]$$

$$5 \sin^2 2x + 8 \cos^3 x - 8 \cos x = 0$$

$$5 \sin^2 2x + 8 \cos x (\cos^2 x - 1) = 0$$

$$20 \sin^2 x \cos^2 x - 8 \cos x \sin^2 x = 0$$

$$4 \cos x \sin^2 x (5 \cos x - 2) = 0$$

$$\cos x = 0$$

или

$$\sin x = 0$$

или

$$\cos x = \frac{2}{5}$$

$$x = \frac{\pi}{2} + \pi n, n \in Z$$

$$x = \pi k, k \in Z$$

$$x = \pm \arccos \frac{2}{5} + 2\pi m, m \in Z$$

$$\frac{3\pi}{2} \leq \frac{\pi}{2} + \pi n \leq 2\pi$$

$$\frac{3\pi}{2} \leq \pi k \leq 2\pi$$

$$\frac{3\pi}{2} \leq \pm \arccos \frac{2}{5} + 2\pi m \leq 2\pi$$

$$1 \leq n \leq 1,5$$

$$\frac{3}{2} \leq k \leq 2$$

$$n = 1$$

$$k = 2$$

$$m = 1$$

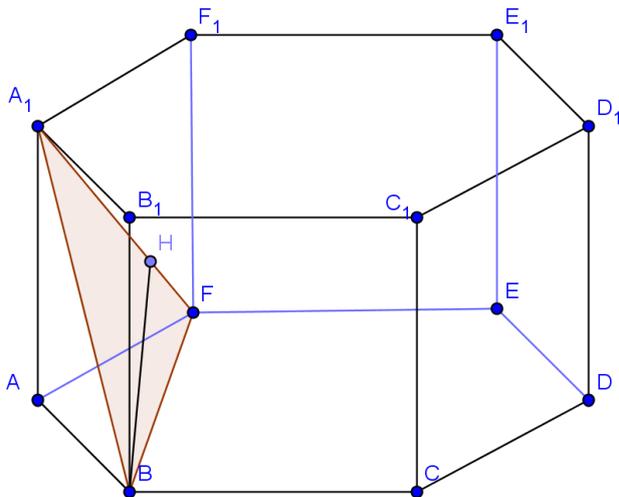
$$x = \frac{3\pi}{2}$$

$$x = 2\pi$$

$$x = 2\pi - \arccos \frac{2}{5}$$

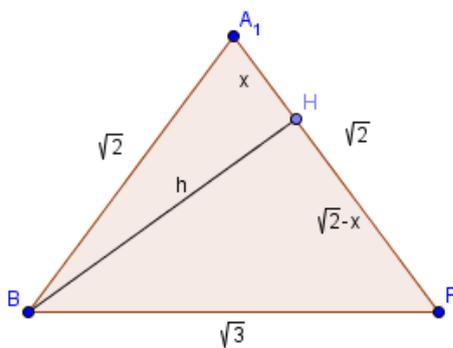
$$\text{Ответ: } \frac{3\pi}{2}; 2\pi; 2\pi - \arccos \frac{2}{5}.$$

С2. В правильной шестиугольной призме $ABCDEF A_1 B_1 C_1 D_1 E_1 F_1$, все рёбра которой равны 1, найдите расстояние от точки B до прямой FA_1 .



Чтобы найти расстояние от точки B до прямой FA_1 , нам необходимо найти длину высоты треугольника BFA_1 .

В этом треугольнике легко найти стороны: $BF = \sqrt{3}$, $FA_1 = BA_1 = \sqrt{2}$.



$BH = h$ - высота. Пусть $A_1H = x$, тогда $FH = \sqrt{2} - x$.

Тогда можем составить систему уравнений с использованием теоремы Пифагора

$$\begin{cases} h^2 + x^2 = 2 \\ h^2 + (\sqrt{2} - x)^2 = 3 \end{cases}, \text{ решением которой являются } x = \frac{1}{2\sqrt{2}}; h = \frac{\sqrt{30}}{4}$$

Значит, расстояние от точки B до прямой FA_1 равно $\frac{\sqrt{30}}{4}$.

С3. Решить систему неравенств:
$$\begin{cases} |3x+1|+2+\frac{3}{|3x+1|-2} \leq \frac{1}{|3x+1|+2} \\ |3x+1|+\sqrt{3x+4} \leq 3 \end{cases}$$

Введем новые переменные

$$p = 3x + 1; \quad t = |p|; \quad t = |3x + 1|, t \geq 0$$

$$1) t + 2 + \frac{3}{t-2} - \frac{1}{t+2} \leq 0$$

$$\frac{(t+2)^2(t-2) + 3(t+2) - (t-2)}{(t+2)(t-2)} \leq 0$$

$$\frac{t^3 + 2t^2 - 2t}{(t+2)(t-2)} \leq 0$$

$$\frac{t(t+1+\sqrt{3})(t+1-\sqrt{3})}{(t+2)(t-2)} \leq 0$$

$$t \in \{0\} \cup [-1+\sqrt{3}; 2) \Rightarrow p \in (-2; 1-\sqrt{3}] \cup \{0\} \cup [-1+\sqrt{3}; 2)$$

$$2) |p| + \sqrt{p+3} \leq 3$$

$$\sqrt{p+3} \leq 3 - |p|$$

$$\begin{cases} 0 \leq p \leq 3 \\ p+3 \leq p^2 - 6p + 9 \end{cases} \text{ или } \begin{cases} -3 \leq p < 0 \\ p+3 \leq p^2 + 6p + 9 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 0 \leq p \leq 3 \\ p^2 - 7p + 6 \geq 0 \end{cases} \quad \begin{cases} -3 \leq p < 0 \\ p^2 + 5p + 6 \geq 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 0 \leq p \leq 3 \\ (p-1)(p-6) \geq 0 \end{cases} \quad \begin{cases} -3 \leq p < 0 \\ (p+2)(p+3) \geq 0 \end{cases}$$

$$p \in [0; 1]$$

$$p \in [-2; 0) \cup \{-3\}$$

$$\text{Значит, } p \in [-2; 1] \cup \{-3\}$$

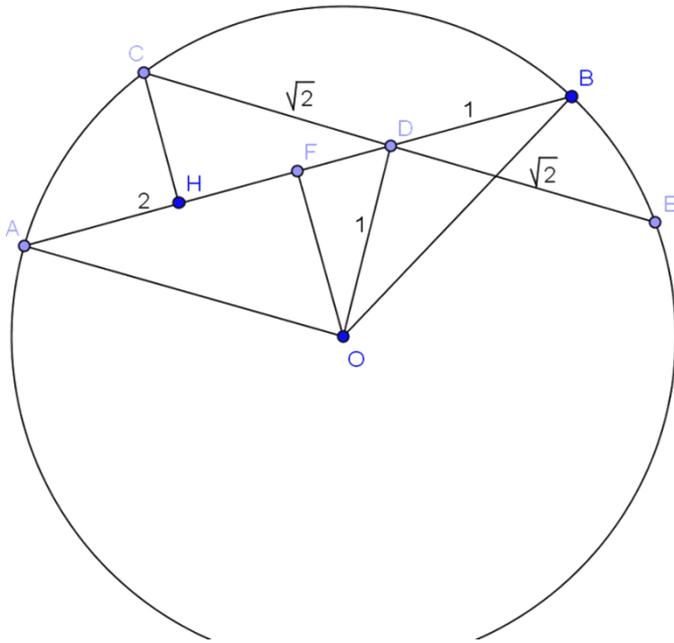
3) Подводим итог: Пересекая промежутки, полученные для первого и второго неравенств, получаем

$$p \in (-2; 1-\sqrt{3}] \cup \{0\} \cup [-1+\sqrt{3}; 1]$$

Ну и, возвращаясь к исходной переменной, получаем

$$x \in (-1; -\frac{\sqrt{3}}{3}] \cup \left\{-\frac{1}{3}\right\} \cup \left[\frac{\sqrt{3}-2}{3}; 0\right].$$

С4. Хорда AB стягивает дугу окружности, равную 120° . Точка C лежит на этой дуге, а точка D лежит на хорде AB . При этом $AD = 2$, $BD = 1$, $DC = \sqrt{2}$. Найти площадь треугольника ABC .



Сначала найдем радиус окружности. Проведем

$OF \perp AB$, F – середина AB

$$AF = \frac{3}{2}; \angle AOF = 60^\circ \Rightarrow R = \frac{1,5}{\sin 60^\circ} = \sqrt{3}$$

Продолжим отрезок CD до пересечения с окружностью в точке E .

По свойству пересекающихся хорд

$$AD \cdot DB = CD \cdot DE$$

$$DE = \sqrt{2}$$

$\triangle COE$ – равнобедренный, OD – медиана, высота

$$OD = \sqrt{OE^2 - DE^2} = \sqrt{3 - 2} = 1$$

$\triangle ODB$ – равнобедренный

$$\angle ABO = \angle DOB = 30^\circ \Rightarrow \angle BDE = 30^\circ = \angle CDH$$

$$CH = \sqrt{2} \sin 30^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} AB \cdot CH = \frac{3\sqrt{2}}{4}.$$

C5. Найти все a , при которых среди корней уравнения

$\sin 2x + 6a \cos x - \sin x - 3a = 0$ найдутся два, удалённые друг от друга на расстояние $\frac{3\pi}{2}$?

$$\sin 2x + 6a \cos x - \sin x - 3a = 0$$

$$2 \sin x \cos x + 6a \cos x - \sin x - 3a = 0$$

$$\sin x(2 \cos x - 1) + 3a(2 \cos x - 1) = 0$$

$$(2 \cos x - 1)(\sin x + 3a) = 0$$

$$\cos x = \frac{1}{2} \quad \text{или} \quad \sin x = -3a$$

Так как расстояние между корнями равно $\frac{3\pi}{2}$, то ввиду того, что между корнями

первого уравнения расстояния $\frac{2\pi}{3}$ или $\frac{4\pi}{3}$, то возможны два случая

1) корни уравнения $\sin x = -3a$ расположены на расстоянии $\frac{3\pi}{2}$ от корней

уравнения $\cos x = \frac{1}{2}$, тогда

$$x_1 = \frac{\pi}{3} \pm \frac{3\pi}{2} \quad \text{или} \quad x_2 = -\frac{\pi}{3} \pm \frac{3\pi}{2}$$

тогда корни можно записать как $x_0 = \pm \frac{\pi}{6} + \pi m$

$$\sin x_0 = \pm \frac{1}{2}, \text{ значит } a = \pm \frac{1}{6}$$

2) корни уравнения $\sin x = -3a$ находятся на расстоянии $\frac{3\pi}{2}$ друг от друга

$$\text{тогда } \sin x_4 = \sin(x_3 \pm \frac{3\pi}{2}) = \pm \cos x_3$$

$$\text{Значит, } \sin x_4 = \pm \frac{\sqrt{2}}{2} = -3a \Rightarrow a = \pm \frac{\sqrt{2}}{6}$$

$$\text{Ответ: } \pm \frac{1}{6}; \pm \frac{\sqrt{2}}{6}$$

С6. Четырёхзначное число, являющееся полным квадратом, обладает следующим свойством: если все его цифры уменьшить на одно и то же число, то получится четырёхзначное число, также являющееся полным квадратом. Найти все такие числа с описанным свойством.

Пусть первое число $x^2 = 1000a + 100b + 10c + d$, тогда второе число можно записать следующим образом: $y^2 = 1000(a - n) + 100(b - n) + 10(c - n) + (d - n)$

Рассмотрим разность

$$x^2 - y^2 = 1111n = 101 \cdot 11n$$

$$(x - y)(x + y) = 101 \cdot 11n$$

Из условия следует, что $32 \leq x, y \leq 99$, тогда
$$\begin{matrix} 64 \leq x + y \leq 198 \\ 0 \leq x - y \leq 67 \end{matrix}$$

Значит,
$$\begin{matrix} x + y = 101 \\ x - y = 11n \end{matrix}$$

Так как $(x+y)$ -нечётное, то и $(x-y)$ -так же нечётное.

Значит, $n=1;3;5$

$$\begin{matrix} \begin{cases} x + y = 101 \\ x - y = 11 \end{cases} & & \begin{cases} x + y = 101 \\ x - y = 33 \end{cases} & & \begin{cases} x + y = 101 \\ x - y = 55 \end{cases} \\ \begin{cases} x = 56 \\ y = 45 \end{cases} & \text{или} & \begin{cases} x = 67 \\ y = 34 \end{cases} & \text{или} & \begin{cases} x = 78 \\ y = 23 \end{cases} \end{matrix}$$

В последней системе переменная y не удовлетворяет условию.

Следовательно, описанному свойству удовлетворяют пары чисел 3136 и 2025; 4489 и 1156.

C7. (бонус): Решить систему неравенств:

$$\begin{cases} 4^{\frac{x^2-2}{x^2+x+1}} + 3 \cdot 6^{\frac{x^2-2}{x^2+x+1}} \geq 4 \cdot 9^{\frac{x^2-2}{x^2+x+1}} \\ \log_{\frac{1}{3}} |x-2| - \log_{2-x} 3 \leq 2 \end{cases}$$

$$1) \quad 4^{\frac{x^2-2}{x^2+x+1}} + 3 \cdot 6^{\frac{x^2-2}{x^2+x+1}} \geq 4 \cdot 9^{\frac{x^2-2}{x^2+x+1}}$$

Пусть $t = \frac{x^2-2}{x^2+x+1}$

$$4^t + 3 \cdot 6^t - 4 \cdot 9^t \geq 0$$

так как $9^t > 0$, то при делении неравенства на 9^t получаем

$$\left(\frac{2}{3}\right)^{2t} + 3 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^t - 4 \geq 0$$

$$\left(\left(\frac{2}{3}\right)^t + 4\right) \left(\left(\frac{2}{3}\right)^t - 1\right) \geq 0$$

$$\left(\frac{2}{3}\right)^t \geq 1 \Rightarrow t \leq 0$$

$$\frac{x^2-2}{x^2+x+1} \leq 0$$

Так как $x^2+x+1 > 0$ при любом $x \in R$,

$$(x-\sqrt{2})(x+\sqrt{2}) \leq 0$$

$$x \in [-\sqrt{2}; \sqrt{2}]$$

$$2) \log_{\frac{1}{3}} |x-2| - \log_{2-x} 3 \leq 2$$

ОДЗ: $2-x > 0$

$$2-x \neq 1$$

$$x \in (-\infty; 1) \cup (1; 2)$$

На ОДЗ неравенство принимает вид

$$-\log_3(2-x) - \log_{2-x} 3 \leq 2$$

Принимая во внимание, что $\log_{2-x} 3 = \frac{1}{\log_3(2-x)}$,

можем сделать замену $\log_3(2-x) = m$

$$m + \frac{1}{m} \geq -2$$

$$\frac{m^2 + 2m + 1}{m} \geq 0$$

$$\frac{(m+1)^2}{m} \geq 0$$

$$m \in \{-1\} \cup (0; +\infty)$$

$$\log_3(2-x) = -1 \quad \text{или} \quad \log_3(2-x) > 0$$

$$2-x = \frac{1}{3}$$

$$2-x > 1$$

$$x = \frac{5}{3}$$

$$x < 1$$

учитывая ОДЗ, получаем, что $x \in (-\infty; 1) \cup \left\{\frac{5}{3}\right\}$

3) А теперь находим пересечение решений первого и второго неравенств.

Учитывая $\frac{5}{3} > \sqrt{2}$, получаем, что

$$x \in [-\sqrt{2}; 1)$$

Ответ: $x \in [-\sqrt{2}; 1)$