Варианты вступительного экзамена по математике в СУНЦ МГУ (школа им. А. Н. Колмогорова) в 2010 году

Д. В. Алексеев, О. П. Виноградов, г. Москва

В марте и апреле 2010 года проводились экзамены для поступающих в СУНЦ МГУ. В данной статье приводятся условия задач, предлагавшихся на экзамене. Решения задач будут опубликованы в брошюре, которая готовится в настоящее время к публикации в издательстве СУНЦ МГУ (www.pms.ru).

Московский письменный экзамен в 10-й класс. Физико-математическое отделение. Март 2010 года. Вариант 1

1. Найти натуральное n большее единицы, если известно, что числа 573, 714 и 902 дают одинаковые остатки при делении на n.

2. Пусть a и b — корни уравнения $x^2 + x - 4 = 0$. Известно, что число

$$(1 + 3b + 7b^2)a^3 + 7b^3a^2 + 3b^3a + b^3$$

— целое. Найти это число.

3. Пусть числа x и y удовлетворяют системе неравенств:

$$\begin{cases} x - 2y & \geq & -10 \\ 2x + y & \leq & -5 \\ x + 3y & \geq & -5 \end{cases}$$

Какое наибольшее значение может принять x?

4. Вне прямой L по одну сторону от нее взяты две точки B и D. Точка B является вершиной равностороннего треугольника ABC, основание которого лежит на прямой L. Известно, что $\angle ADC = 105°$, $BC = 4$. Прямые AD и CD пересекают окружность, описанную вокруг треугольника ABC, в точках P и Q. Найти длину отрезка PQ.

5. На плоскости Oxy отметить все точки, через которые не проходит ни одна из парабол $y = x^2 - 4px + 2p^2 - 3$, где p — любое действительное число.

Московский письменный экзамен в 11-й класс. Физико-математическое отделение. Март 2010 года. Вариант 1

1. Найти площадь фигуры на плоскости Oxy, которая состоит из точек с координатами (x, y), удовлетворяющими неравенству $|x| \leq 3 + \sqrt{6|y| - y^2}$.

2. В трапеции $ABCD$ с основаниями $BC = 3$ и $AD = 4$ на продолжении основания BC за точку C выбрана точка E, так, что прямая AE делит трапецию на две равновеликие (т.е. имеющие одинаковую площадь) части. Найти длину отрезка CE.

3. На плоскости взяты две точки A и B. Через точку A в этой плоскости проведены 20 прямых, а через точку B в этой же плоскости — 11 прямых. Известно, что любые две из этих прямых пересекаются в одной точке, и среди них нет прямой, проходящей одновременно как через точку A, так и через точку B. Сколько различных треугольников образуется при пересечении всех этих прямых?

4. Восьмая степень целого числа n записывается 9-ю цифрами 1, 2, 4, 6, 6, 8, 9, 9, 9, расположенными в некотором порядке. Найти число n.

5. Для всех $n \geq 1$ все члены последовательности $\{a_n\}$ удовлетворяют условию $a_{n+1} = a_n a_{n+2}$. Известно, что $a_1 = 2$ и произведение $a_{41}a_{42}...a_{80} = 1$. Найти a_2.

Физико-математическое отделение. Апрель 2010 года. Продолжительность 90 минут. Вариант 1.

Для задач 1-4 напишите ответ.

1. Какому числу равно выражение

$$\frac{5}{4}a^2 - 3(a - b)(a + b) + \frac{(a + b)^2}{2} - \frac{14b^2 - 5a^2}{4},$$

если $a = 46/15$, $b = 7,5$.

2. На какое наименьшее натуральное число нужно разделить произведение $(4!) \times (5!) \times ... \times (10!) \times (11!) \times (12!)$, чтобы частное было квадратом некоторого натурального числа? ($n! = 1 \times 2 \times ... \times n$).

3. Сколько целых чисел удовлетворяет неравенству

$$\sqrt{x^2-2x+1}+\sqrt{x^2+8x+16}\le 101\,?$$

4. Числа 1; 2; 2,8; 5; 7,5, полученные в результате измерения одной диагонали и четырех сторон выпуклого четырехугольника, расположены в порядке возрастания. Чему равна длина диагонали?

Для задач 5-7 напишите решение.

5. Числа a_1, a_2, a_3 являются последовательными членами арифметической прогрессии, числа b_1, b_2, b_3 являются последовательными членами геометрической прогрессии. Известно, что $a_1 + a_2 + a_3 = 126$, $a_1 + b_1 = 85$, $a_2 + b_2 = 76$, $a_3 + b_3 = 84$. Найти члены обеих прогрессий.

6. Длины 2-х сторон параллелограмма относятся друг к другу как 5 : 8, длина меньшей диагонали равна 28. Найти длины сторон параллелограмма, если его один угол больше другого в два раза.

7. Пусть x, y, z означают различные цифры. Известно, что

$$\overline{xx}\times\overline{yz}\times\overline{xyz}=\overline{xyzxyz}.$$

Чему равно $x-y+z$?

Московский устный экзамен в 10-й класс. Физико-математическое отделение. Апрель 2010 года. Вариант 1

1. Саша получил пятерок в 3-ей четверти на 5% меньше, чем во 2-ой четверти, а в 1-ой четверти на 20% больше, чем в 3-ей. На сколько процентов Саша получил пятерок больше в 1-ой четверти, чем во 2-ой четверти?

2. Центр O окружности радиуса 3 лежит на гипотенузе AC прямоугольного треугольника ABC. Катеты треугольника касаются окружности. Найдите площадь треугольника, если длина отрезка OC равна 5.

3. Из чисел 7, 8, 9, ... , 153, 154 выбирают одно число, а затем из оставшихся чисел выбирают еще одно число. Сколько существует так составленных различных пар чисел, у которых второе выбранное число делится на 3?

4. Пусть a_n является n-м членом арифметической прогрессии. Вычислить сумму

$$S=\frac{1}{a_1a_2}+\frac{1}{a_2a_3}+\ldots+\frac{1}{a_{2009}a_{2010}},$$

если $a_1 = 1$, а разность прогрессии равна 3.

5. Число $\sqrt{2000\times 2001\times 2002\times 2003+1}$ является целым. Найдите это число.

Московский устный экзамен в 11-й класс. Физико-математическое отделение. Апрель 2010 года. Вариант 1

1. Число a больше числа b на $x\%$, а число b меньше числа a на $(\frac{4}{5}x\%)$. Найдите x.

2. Ветви параболы $y(x) = ax^2 + bx + c$ направлены вниз, а вершина находится в точке $(1, 1)$. Расстояние от начала координат до точки пересечения графика параболы с осью OY равно 3. Напишите уравнение этой параболы.

3. Внутри треугольника ABC с основанием $AC = 30$см и высотой $BH = 10$см расположен равнобедренный прямоугольный треугольник так, что его гипотенуза параллельна основанию, вершина прямого угла лежит на AC, а вершины острых углов лежат на AB и BC. Определите стороны вписанного треугольника.

4. Сколько существует натуральных трехзначных чисел с ненулевыми цифрами, у которых любые две цифры отличаются друг от друга не меньше чем в два раза, а сумма цифр больше 10?

5. Найдите все $a > 1/2$, для которых интервал $(4a + 1; 6a)$ содержит внутри себя ровно одну целую точку.

Работа О. П. Виноградова выполнена при содействии РГНФ, грант №08-06-00144а.