

## 9 класс

## Первый день

- 9.1. Про три положительных числа известно, что если выбрать одно из них и прибавить к нему сумму квадратов двух других, то получится одна и та же сумма, независимо от выбранного числа. Верно ли, что все числа равны?
- 9.2. Дан равнобедренный треугольник  $ABC$  ( $AB = AC$ ). На меньшей дуге  $AB$  описанной около него окружности взята точка  $D$ . На продолжении отрезка  $AD$  за точку  $D$  выбрана точка  $E$  так, что точки  $A$  и  $E$  лежат в одной полуплоскости относительно  $BC$ . Описанная окружность треугольника  $BDE$  пересекает сторону  $AB$  в точке  $F$ . Докажите, что прямые  $EF$  и  $BC$  параллельны.
- 9.3. Через центры некоторых клеток шахматной доски  $8 \times 8$  проведена замкнутая несамопересекающаяся ломаная. Каждое звено ломаной соединяет центры соседних по горизонтали, вертикали или диагонали клеток. Докажите, что в ограниченном ею многоугольнике общая площадь чёрных частей равна общей площади белых частей.
- 9.4. Даны положительные числа  $x, y, z$ . Докажите неравенство

$$\frac{x+1}{y+1} + \frac{y+1}{z+1} + \frac{z+1}{x+1} \leq \frac{x}{y} + \frac{y}{z} + \frac{z}{x}.$$

## 9 класс

## Второй день

- 9.5. Найдите все числа  $a$  такие, что для любого натурального  $n$  число  $an(n+2)(n+4)$  будет целым.
- 9.6. Вначале на плоскости были отмечены три различные точки. Каждую минуту выбирались некоторые три из отмеченных точек — обозначим их  $A, B$  и  $C$ , после чего на плоскости отмечалась точка  $D$ , симметричная  $A$  относительно серединного перпендикуляра к  $BC$ .  
Через сутки оказалось, что среди отмеченных точек нашлись три различные точки, лежащие на одной прямой. Докажите, что три исходных точки также лежали на одной прямой.
- 9.7. Найдите все тройки простых чисел  $p, q, r$  такие, что четвёртая степень любого из них, уменьшенная на 1, делится на произведение двух остальных.
- 9.8. Прямоугольную палку длиной 2 метра распилили на  $N$  палочек, длина каждой из которых выражается целым числом сантиметров. При каком наименьшем  $N$  можно гарантировать, что, используя все получившиеся палочки, можно, не ломая их, сложить контур некоторого прямоугольника?

## 10 класс

## Первый день

- 10.1. Два бегуна стартовали одновременно из одной точки. Сначала они бежали по улице до стадиона, а потом до финиша — три круга по стадиону. Всю дистанцию оба бежали с постоянными скоростями, и в ходе забега первый бегун дважды обогнал второго. Докажите, что первый бежал по крайней мере вдвое быстрее, чем второй.
- 10.2. На стороне  $AC$  остроугольного треугольника  $ABC$  выбраны точки  $M$  и  $K$  так, что  $\angle ABM = \angle CBK$ . Докажите, что центры окружностей, описанных около треугольников  $ABM$ ,  $ABK$ ,  $CBM$  и  $CBK$ , лежат на одной окружности.
- 10.3. Даны различные натуральные числа  $a_1, a_2, \dots, a_{14}$ . На доску выписаны все 196 чисел вида  $a_k + a_\ell$ , где  $1 \leq k, \ell \leq 14$ . Может ли оказаться, что для любой комбинации из двух цифр среди написанных на доске чисел найдется хотя бы одно число, оканчивающееся на эту комбинацию (то есть, найдутся числа, оканчивающиеся на 00, 01, 02, ..., 99)?
- 10.4. Ненулевые числа  $a, b, c$  таковы, что любые два из трёх уравнений  $ax^{11} + bx^4 + c = 0$ ,  $bx^{11} + cx^4 + a = 0$ ,  $cx^{11} + ax^4 + b = 0$  имеют общий корень. Докажите, что все три уравнения имеют общий корень.

## 10 класс

## Второй день

- 10.5. Найдите все числа  $a$  такие, что для любого натурального  $n$  число  $an(n+2)(n+3)(n+4)$  будет целым.
- 10.6. На доску выписаны 2011 чисел. Оказалось, что сумма любых трёх выписанных чисел также является выписанным числом. Какое наименьшее количество нулей может быть среди этих чисел?
- 10.7. В неравностороннем остроугольном треугольнике  $ABC$  точки  $C_0$  и  $B_0$  — середины сторон  $AB$  и  $AC$  соответственно,  $O$  — центр описанной окружности,  $H$  — точка пересечения высот. Прямые  $BH$  и  $OC_0$  пересекаются в точке  $P$ , а прямые  $CH$  и  $OB_0$  — в точке  $Q$ . Оказалось, что четырехугольник  $OPHQ$  — ромб. Докажите, что точки  $A$ ,  $P$  и  $Q$  лежат на одной прямой.
- 10.8. Прямую палку длиной 2 метра распилили на  $N$  палочек, длина каждой из которых выражается целым числом сантиметров. При каком наименьшем  $N$  можно гарантировать, что, используя все получившиеся палочки, можно, не ломая их, сложить контур некоторого прямоугольника?

## 11 класс

## Первый день

- 11.1. Существует ли такое вещественное  $\alpha$ , что число  $\cos \alpha$  иррационально, а все числа  $\cos 2\alpha$ ,  $\cos 3\alpha$ ,  $\cos 4\alpha$ ,  $\cos 5\alpha$  рациональны?
- 11.2. Даны 2011 ненулевых целых чисел. Известно, что сумма любого из них с произведением оставшихся 2010 чисел отрицательна. Докажите, что если произвольным образом разбить все данные числа на две группы и перемножить числа в группах, то сумма двух полученных произведений также будет отрицательной.
- 11.3. На окружности, описанной около прямоугольника  $ABCD$ , выбрана точка  $K$ . Оказалось, что прямая  $CK$  пересекает отрезок  $AD$  в точке  $M$  такой, что  $AM : MD = 2$ . Пусть  $O$  — центр прямоугольника. Докажите, что точка пересечения медиан треугольника  $OKD$  лежит на окружности, описанной около треугольника  $COD$ .
- 11.4. 2011 складов соединены дорогами так, что от любого склада можно проехать к любому другому, возможно, проехав по нескольким дорогам. На складах находится по  $x_1, \dots, x_{2011}$  кг цемента соответственно. За один рейс можно провезти с произвольного склада на другой склад по соединяющей их дороге произвольное количество цемента. В итоге на складах по плану должно оказаться по  $y_1, \dots, y_{2011}$  кг цемента соответственно, причём

$$x_1 + x_2 + \dots + x_{2011} = y_1 + y_2 + \dots + y_{2011}.$$

За какое минимальное количество рейсов можно выполнить план при любых значениях чисел  $x_i$  и  $y_i$  и любой схеме дорог?

## 11 класс

## Второй день

- 11.5. Найдите все числа  $a$  такие, что для любого натурального  $n$  число  $an(n+2)(n+3)(n+4)$  будет целым.
- 11.6. Остроугольный треугольник  $ABC$  вписан в окружность  $\omega$ . Касательные к  $\omega$ , проведенные через точки  $B$  и  $C$ , пересекают касательную к  $\omega$ , проведенную через точку  $A$ , в точках  $K$  и  $L$  соответственно. Прямая, проведенная через  $K$  параллельно  $AB$ , пересекается с прямой, проведенной через  $L$  параллельно  $AC$ , в точке  $P$ . Докажите, что  $BP = CP$ .
- 11.7. Вася нарисовал на плоскости несколько окружностей и провёл всевозможные общие касательные к каждой паре этих окружностей. Оказалось, что проведённые прямые содержат все стороны некоторого правильного 2011-угольника. Какое наименьшее количество окружностей мог нарисовать Вася?
- 11.8. Даны положительные числа  $b$  и  $c$ . Докажите неравенство
- $$(b-c)^{2011}(b+c)^{2011}(c-b)^{2011} \geq (b^{2011} - c^{2011})(b^{2011} + c^{2011})(c^{2011} - b^{2011}).$$

## УСЛОВИЯ И РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ

## 9 класс

- 9.1. Про три положительных числа известно, что если выбрать одно из них и прибавить к нему сумму квадратов двух других, то получится одна и та же сумма, независимо от выбранного числа. Верно ли, что все числа равны? (Л. Емельянов)

**Ответ.** Нет, неверно.

**Решение.** Подойдёт, например, тройка  $1/3, 1/3, 2/3$ .

**Замечание.** Все такие тройки можно получить, решив соответствующую систему:  $a + b^2 + c^2 = a^2 + b + c^2 = a^2 + b^2 + c$ . Из первых двух равенств имеем  $a^2 - a = b^2 - b$ ; перенося всё в левую часть, получаем  $(a - b)(a + b - 1) = 0$ . Значит,  $a = b$  или  $b = 1 - a$ ; аналогичные утверждения верны для остальных пар чисел. Итого, кроме троек из равных чисел, подходят все тройки вида  $a, a, 1 - a$  и только они.

- 9.2. Дан равнобедренный треугольник  $ABC$  ( $AB = AC$ ). На меньшей дуге  $AB$  описанной около него окружности взята точка  $D$ . На продолжении отрезка  $AD$  за точку  $D$  выбрана точка  $E$  так, что точки  $A$  и  $E$  лежат в одной полуплоскости относительно  $BC$ . Описанная окружность треугольника  $BDE$  пересекает сторону  $AB$  в точке  $F$ . Докажите, что прямые  $EF$  и  $BC$  параллельны. (Р. Женодаров)

**Решение.** Обозначим через  $\Omega$  и  $\omega$  описанные окружности треугольников  $ABC$  и  $BDE$ . Положим  $\angle ACB = \angle ABC = \alpha$ . Четырёхугольник  $BDAC$  вписан в  $\Omega$ , значит,  $\angle ADB = 180^\circ - \angle ACB = 180^\circ - \alpha$ . Углы  $ADB$  и  $EDB$  — смежные, откуда  $\angle EDB = 180^\circ - \angle ADB = \alpha$ .

Далее, поскольку четырёхугольник  $EDFB$  вписан в  $\omega$ , имеем  $\angle EFB = \angle EDB = \alpha$ .

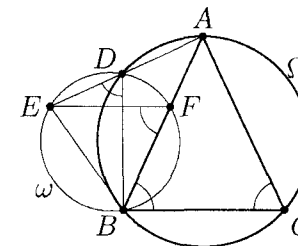


Рис. 1

Итого,  $\angle EFB = \angle FBC = \alpha$ , а значит, прямые  $EF$  и  $BC$  параллельны.

- 9.3. Через центры некоторых клеток шахматной доски  $8 \times 8$  проведена замкнутая несамопересекающаяся ломаная. Каждое звено ломаной соединяет центры соседних по горизонтали, вертикали или диагонали клеток. Докажите, что в ограниченном ею многоугольнике общая площадь чёрных частей равна общей площади белых частей.

(Д. Храмуцов)

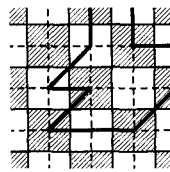


Рис. 2

**Решение.** Проведём пунктиром вертикальные и горизонтальные линии через центры клеток доски. На получившейся пунктирной сетке каждое звено нашей ломаной соединяет узлы, соседние по вертикали, горизонтали или диагонали. Поэтому пунктирные прямые разбивают область, ограниченную ломаной, на единичные квадратики и половинки квадратиков, получаемые разрезанием их по диагонали.

Осталось заметить, что в каждом таком квадратике и в каждом таком треугольнике площади чёрной и белой частей равны. Действительно, каждый квадратик содержит по две четверти клеток обоих цветов, а треугольник — четверть клетки одного цвета и два треугольничка, каждый из которых составляет восьмую часть клетки другого цвета.

**Комментарий.** Рассмотрение некоторых конкретных ломаных без описания общей идеи решения — 0 баллов.

- 9.4. Даны положительные числа  $x, y, z$ . Докажите неравенство

$$\frac{x+1}{y+1} + \frac{y+1}{z+1} + \frac{z+1}{x+1} \leq \frac{x}{y} + \frac{y}{z} + \frac{z}{x}.$$

(А. Храбров, Б. Трушин)

**Решение.** Заметим, что  $\frac{a+1}{b+1} - \frac{a}{b} = \frac{b-a}{b(b+1)}$  для любых положительных  $a$  и  $b$ . Значит, после переноса всех членов в левую часть требуемое неравенство приобретает вид

$$\frac{y-x}{y(y+1)} + \frac{z-y}{z(z+1)} + \frac{x-z}{x(x+1)} \leq 0. \quad (1)$$

Можно считать, что  $x$  — наибольшее из трёх данных чисел. Возможны два случая.

*Случай 1.*  $y \geq z$ . В этом случае имеем

$$\frac{x-y}{x(x+1)} \leq \frac{x-y}{y(y+1)}, \quad \frac{y-z}{x(x+1)} \leq \frac{y-z}{z(z+1)}.$$

Складывая эти неравенства, получаем

$$\frac{x-z}{x(x+1)} \leq -\frac{y-x}{y(y+1)} - \frac{z-y}{z(z+1)},$$

что равносильно (1).

*Случай 2.*  $y < z$ . Тогда имеем

$$\frac{z-y}{z(z+1)} \leq \frac{z-y}{y(y+1)}, \quad \frac{x-z}{x(x+1)} \leq \frac{x-z}{y(y+1)}.$$

Складывая эти неравенства, получаем

$$\frac{z-y}{z(z+1)} + \frac{x-z}{x(x+1)} \leq -\frac{y-x}{y(y+1)},$$

что опять же равносильно (1).

**Комментарий.** Существуют два различных варианта упорядочения переменных, с точностью до циклической перестановки (в авторском решении это варианты  $x \geq y \geq z$  и  $x \geq z \geq y$ ). Правильное рассмотрение только одного из таких случаев — ставить 3 балла.

## 10 класс

- 10.1. Два бегуна стартовали одновременно из одной точки. Сначала они бежали по улице до стадиона, а потом до финиша — три круга по стадиону. Всю дистанцию оба бежали с постоянными скоростями, и в ходе забега первый бегун дважды обогнал второго. Докажите, что первый бежал по крайней мере вдвое быстрее, чем второй. (И. Рубанов)

**Решение.** Первый мог обогнать второго только на кольцевой дорожке стадиона. Так как он вбежал на стадион первым, на своём первом круге он обогнать второго не мог. Стало быть, обгоны случились, когда первый бежал по стадиону свои второй и третий круги. Пока первый бежал эти два круга, он обогнал второго по крайней мере на круг. Следовательно, второй за это время пробежал не больше одного круга, откуда и вытекает требуемое утверждение.

**Комментарий.** Если в решении рассмотрен лишь некоторый частный случай (например, без обоснования говорится, что достаточно рассмотреть лишь случай, когда первая встреча происходит в тот момент, когда второй бегун вбегает на стадион, или без обоснования утверждается, что «наихудший случай — если вторая встреча произошла на финише») — ставится не более 3 баллов за всю задачу.

- 10.2. На стороне  $AC$  остроугольного треугольника  $ABC$  выбраны точки  $M$  и  $K$  так, что  $\angle ABM = \angle CBK$ . Докажите, что центры окружностей, описанных около треугольников  $ABM$ ,  $ABK$ ,  $CBM$  и  $CBK$ , лежат на одной окружности. (Т. Емельянова)

**Решение.** Без ограничения общности можно считать, что точка  $M$  лежит между  $A$  и  $K$ . Пусть  $O_1, O_2, O_3$  и  $O_4$  — центры описанных окружностей треугольников  $ABM$ ,  $ABK$ ,  $CBM$  и  $CBK$  соответственно. Прямые  $O_1O_3$  и  $O_1O_2$  являются серединными перпендикулярами к отрезкам  $BM$  и  $AB$ , соответственно. Значит, углы  $O_2O_1O_3$  и  $ABM$  равны как углы с взаимно перпендикулярными сторонами (см. рис. 3). Аналогично,  $\angle O_2O_4O_3 = \angle CBK$ , а значит,  $\angle O_2O_4O_3 = \angle O_2O_1O_3$ . Это и означает, что точки  $O_1, O_2, O_3, O_4$  лежат на одной окружности.

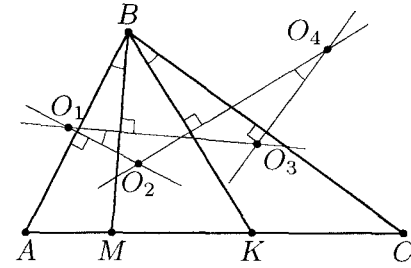


Рис. 3

**Замечание.** Нетрудно видеть, что точка пересечения прямых  $O_1O_2$  и  $O_3O_4$  — центр  $O$  описанной окружности треугольника  $ABC$ , причём точки  $O_2$  и  $O_3$  лежат на отрезках  $OO_1$  и  $OO_4$ , соответственно. Это позволяет обосновать расположение точек на рисунке.

**Комментарий.** За отсутствие обоснования расположения точек баллы не снимаются.

- 10.3. Даны различные натуральные числа  $a_1, a_2, \dots, a_{14}$ . На доску выписаны все 196 чисел вида  $a_k + a_\ell$ , где  $1 \leq k, \ell \leq 14$ . Может ли оказаться, что для любой комбинации из двух цифр среди написанных на доске чисел найдется хотя бы одно число, оканчивающееся на эту комбинацию (то есть, найдутся числа, оканчивающиеся на 00, 01, 02,  $\dots$ , 99)? (П. Кожевников)

**Ответ.** Не может.

**Решение.** Пусть среди наших 14 чисел есть  $a$  чётных и  $b = 14 - a$  нечётных. Нечётное число на доске может появиться лишь как сумма чётного и нечётного, т.е. таких чисел будет  $ab$  (при этом каждое будет выписано по два раза). Но  $ab = \frac{(a+b)^2 - (a-b)^2}{4} \leq \frac{(a+b)^2}{4} = 49$ . Значит, на доске будет не более 49 различных нечётных чисел; а, чтобы выполнялось условие, их должно быть хотя бы 50. Значит, требуемое невозможно.

**Комментарий.** Доказано только, что на доску выписаны не более 105 различных чисел — 0 баллов.

- 10.4. Ненулевые числа  $a, b, c$  таковы, что любые два из трёх уравнений  $ax^{11} + bx^4 + c = 0$ ,  $bx^{11} + cx^4 + a = 0$ ,  $cx^{11} + ax^4 + b = 0$  имеют

общий корень Докажите, что все три уравнения имеют общий корень (И Богданов)

**Решение.** Заметим сразу, что все корни наших уравнений — ненулевые, поскольку свободные члены не равны нулю

Пусть  $p$  — общий корень первых двух уравнений Тогда имеем

$$0 = b(ap^{11} + bp^4 + c) - a(bp^{11} + cp^4 + a) = p^4(b^2 - ac) - (a^2 - bc)$$

$$0 = b(bp^{11} + cp^4 + a) - c(ap^{11} + bp^4 + c) = p^{11}(b^2 - ac) - (c^2 - ab)$$

Отсюда следует, что если одно из чисел  $a^2 - bc$ ,  $b^2 - ac$ ,  $c^2 - ab$  равно нулю, то и все три равны нулю Но тогда  $a/b = b/c = c/a$ , а поскольку произведение этих чисел равно 1, то и все они равны 1, то есть  $a = b = c$  В этом случае утверждение задачи очевидно

В противном случае все три числа  $|a^2 - bc|$ ,  $|b^2 - ac|$ ,  $|c^2 - ab|$  ненулевые Переименовав, если надо, переменные по циклу, можно считать, что  $|b^2 - ac|$  — среднее по величине из них Тогда из полученных выше равенств следует, что одно из чисел  $|p|^4 = \frac{|a^2 - bc|}{|b^2 - ac|}$  и  $|p|^{11} = \frac{|c^2 - ab|}{|b^2 - ac|}$  не больше единицы, а другое — не меньше единицы Это возможно лишь тогда, когда оба они равны единице, то есть  $|p| = 1$ ,  $|a^2 - bc| = |b^2 - ac| = |c^2 - ab|$  Обозначая через  $q$  и  $r$  общие корни в других парах, получаем теперь из аналогичных равенств  $|q| = |r| = |p| = 1$ , и два из чисел  $p, q, r$  равны, скажем,  $p = q$  Но тогда это число является общим корнем всех трех уравнений

**Комментарий.** Получено выражение общего корня  $p$  двух уравнений (или его степени) через  $a, b, c$  — 1 балл

Получены два существенно различных выражения степеней  $p$  через  $a, b, c$  (как, например, выражения  $p^4 = \frac{a^2 - bc}{b^2 - ac}$  и  $p^{11} = \frac{c^2 - ab}{b^2 - ac}$  в авторском решении) — 2 балла

Если вдобавок к предыдущему продвижению разобран случай обращения в 0 одного из выражений  $b^2 - ac$ ,  $c^2 - ab$ ,  $a^2 - bc$  — добавить еще 1 балл

## 11 класс

- 11.1 Существует ли такое вещественное  $\alpha$ , что число  $\cos \alpha$  иррационально, а все числа  $\cos 2\alpha, \cos 3\alpha, \cos 4\alpha, \cos 5\alpha$  рациональны?

(В Сендеров)

**Ответ.** Не существует

**Решение.** Предположим противное Тогда число  $A = \cos \alpha + \cos 5\alpha$  иррационально как сумма рационального и иррационального, с другой стороны,  $A = 2 \cos 2\alpha \cos 3\alpha$  рационально как произведение трех рациональных чисел Противоречие

**Замечание.** Если убрать из условия  $\cos 5\alpha$ , то ответ будет другим Например, при  $\alpha = \pi/6$  число  $\cos \alpha$  иррационально, а числа  $\cos 2\alpha, \cos 3\alpha, \cos 4\alpha$  рациональны

С другой стороны, из решения видно, что  $\cos 4\alpha$  можно удалить из условия безболезненно

**Комментарий.** Только ответ — 0 баллов

- 11.2 Даны 2011 ненулевых целых чисел Известно, что сумма любого из них с произведением оставшихся 2010 чисел отрицательна Докажите, что если произвольным образом разбить все данные числа на две группы и перемножить числа в группах, то сумма двух полученных произведений также будет отрицательной

(Н Агаханов И Богданов)

**Решение.** Предположим, что среди данных чисел четное количество отрицательных Тогда среди них есть положительное число  $a$ , и произведение всех чисел, кроме  $a$ , положительно Это противоречит условию

Значит, среди данных чисел нечетное число отрицательных Пусть  $x_1, x_2, \dots, x_k$  и  $y_1, y_2, \dots, y_m$  — две группы, на которые разбиты данные числа ( $k + m = 2011$ ) Ровно одно из двух произведений  $x_1 x_2 \dots x_k$  и  $y_1 y_2 \dots y_m$  (а именно то, в котором нечетное число отрицательных сомножителей) — отрицательно, пусть для определенности  $x_1 x_2 \dots x_k < 0$ ,  $y_1 y_2 \dots y_m > 0$  Тогда среди чисел  $x_1, x_2, \dots, x_k$  найдется отрицательное, скажем,  $x_1 < 0$  Отсюда  $x_2 \dots x_k > 0$ , а значит,  $x_2 \dots x_k \geq 1$  (так как данные числа целые) Следовательно,  $x_1 x_2 \dots x_k + y_1 y_2 \dots y_m \leq$

$\leq x_1 + y_1 y_2 \dots y_m \leq x_1 + y_1 y_2 \dots y_m x_2 \dots x_k$ . Но по условию  $x_1 + y_1 y_2 \dots y_m x_2 \dots x_k < 0$ .

**Замечание.** Можно показать, что условие задачи выполняется тогда и только тогда, когда среди данных чисел ровно одно отрицательное, и его модуль больше произведения всех остальных.

**Комментарий.** Доказано, что среди данных чисел нечетное число отрицательных — 2 балла.

- 11.3. На окружности, описанной около прямоугольника  $ABCD$ , выбрана точка  $K$ . Оказалось, что прямая  $CK$  пересекает отрезок  $AD$  в точке  $M$  такой, что  $AM : MD = 2$ . Пусть  $O$  — центр прямоугольника. Докажите, что точка пересечения медиан треугольника  $OKD$  лежит на окружности, описанной около треугольника  $COD$ . (В Шмаров)

**Решение.** Отметим на продолжении отрезка  $AD$  такую точку  $T$ , что  $AT = DM$ . Тогда прямоугольные треугольники  $CDM$  и  $BAT$  равны, а значит,  $BT \parallel CM$ . Заметим, что  $DT = DA + AT = 3DM + DM = 4DM$ . По теореме Фалеса, прямая  $CM$  пересекает отрезок  $BD$  в точке  $N$  такой, что  $DB = 4DN$ . Значит,  $DN = NO$ , то есть  $KN$  — медиана треугольника  $OKD$ .

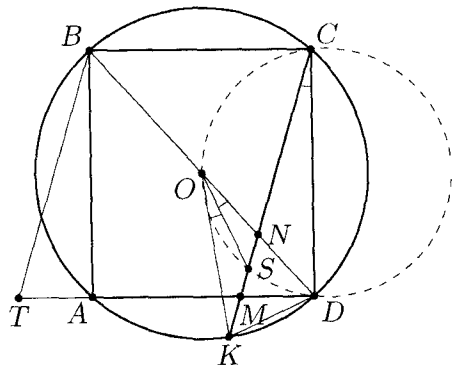


Рис. 4

Пусть  $S$  — точка пересечения медиан треугольника  $OKD$ . Поскольку  $OD = OK$ , точка  $S$  лежит на биссектрисе угла  $KOD$ , и  $\angle SOD = \frac{1}{2} \angle KOD$ . С другой стороны, вписан-

ный угол  $KCD$  равен половине центрального угла  $KOD$ , откуда  $\angle SOD = \frac{1}{2} \angle KOD = \angle SCD$ . Это и означает, что точки  $S$ ,  $D$ ,  $O$ ,  $C$  лежат на одной окружности.

**Комментарий.** Доказано, что прямая  $CK$  делит отрезок  $OD$  пополам — 2 балла.

- 11.4. 2011 складов соединены дорогами так, что от любого склада можно проехать к любому другому, возможно, проехав по нескольким дорогам. На складах находится по  $x_1, \dots, x_{2011}$  кг цемента соответственно. За один рейс можно провезти с произвольного склада на другой склад по соединяющей их дороге произвольное количество цемента. В итоге на складах по плану должно оказаться по  $y_1, \dots, y_{2011}$  кг цемента соответственно, причём

$$x_1 + x_2 + \dots + x_{2011} = y_1 + y_2 + \dots + y_{2011}.$$

За какое минимальное количество рейсов можно выполнить план при любых значениях чисел  $x_i$  и  $y_i$  и любой схеме дорог?

(Р Карасев)

**Ответ.** За 2010 рейсов.

**Решение.** Покажем вначале, что за 2009 рейсов план выполнить удастся не всегда. Пусть (при произвольной схеме дорог) изначально весь цемент расположен на одном складе  $S$ , а распределить его нужно по всем складам поровну. Тогда на каждый склад, кроме  $S$ , нужно в каком-нибудь рейсе цемент завезти; ясно, что такие 2010 рейсов различны, поэтому всего рейсов должно быть не меньше 2010.

Нам осталось показать, что за 2010 рейсов план всегда удастся выполнить. Мы докажем индукцией по  $n$ , что при  $n$  складах всегда удастся обойтись  $n - 1$  рейсом. База при  $n = 1$  очевидна.

Пусть  $n > 1$ . Так как с любого склада можно добраться до любого другого, то существует маршрут, проходящий по всем складам (может быть, неоднократно). Рассмотрим любой такой маршрут и склад  $A$ , который впервые появился на этом маршруте позже всего. Тогда, если удалить склад  $A$  и все дороги,



ведущие из него, то по-прежнему от любого склада до любого другого можно добраться (по предыдущим дорогам маршрута).

Можно считать, что  $A$  — склад с номером  $n$ . Если  $y_n \leq x_n$ , то вывезем из  $A$  на любой соединённый с ним склад  $x_n - y_n$  кг цемента, а после этого забудем про него и про все дороги, из него ведущие. По предположению индукции, для оставшихся складов можно выполнить план за  $(n-1)-1$  рейс. В итоге через  $(n-2)+1$  рейс получится требуемое распределение цемента.

Если же  $y_n > x_n$ , то мы уже доказали, что из распределения, когда на  $i$ -м складе находится  $y_i$  кг, можно получить распределение, когда на  $i$ -м складе находится  $x_i$  кг, за  $n-1$  рейс. Проведя теперь все эти перевозки в обратном порядке (и обратном направлении), мы осуществим требуемый план.

**Комментарий.** Только ответ — 0 баллов.

Только предъявлен пример, показывающий, что за 2009 рейсов план выполним не всегда — 2 балла.

Доказано только, что 2010 рейсов хватит всегда — 5 баллов.

## УСЛОВИЯ И РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ

## 9 класс

- 9.5. Найдите все числа  $a$  такие, что для любого натурального  $n$  число  $an(n+2)(n+4)$  будет целым. (О. Подлипский)

**Ответ.**  $a = \frac{k}{3}$ , где  $k$  — любое целое число.

**Решение.** Подставив  $n = 1$  и  $n = 2$ , получаем, что числа  $15a$  и  $48a$  — целые. Значит, и число  $48a - 3 \cdot 15a = 3a$  — тоже целое. Таким образом,  $a = k/3$  для некоторого целого  $k$ .

Осталось показать, что все числа такого вида подходят. Действительно, одно из трёх последовательных чётных (или нечётных) чисел  $n$ ,  $n+2$ ,  $n+4$  делится на 3; значит,  $n(n+2)(n+4)$  делится на 3, а поэтому  $an(n+2)(n+4) = k \frac{n(n+2)(n+4)}{3}$  — целое число.

**Комментарий.** Доказано, что любое число указанного вида подходит — 2 балла.

Доказано, что число  $a$  обязано иметь указанный вид — 4 балла.

Только правильный ответ — 1 балл (этот балл не суммируется с другими).

- 9.6. Вначале на плоскости были отмечены три различные точки. Каждую минуту выбирались некоторые три из отмеченных точек — обозначим их  $A$ ,  $B$  и  $C$ , после чего на плоскости отмечалась точка  $D$ , симметричная  $A$  относительно серединного перпендикуляра к  $BC$ .

Через сутки оказалось, что среди отмеченных точек нашлись три различные точки, лежащие на одной прямой. Докажите, что три исходных точки также лежали на одной прямой. (В. Шмаров)

**Решение.** Предположим противное; тогда исходные три точки лежат на некоторой окружности  $\omega$ . Докажем индукцией по количеству минут, что все отмеченные точки также лежат на  $\omega$ . Действительно, изначально это верно. Пусть в некоторый момент по точкам  $A$ ,  $B$ ,  $C$  строится точка  $D$ . Тогда середин-

ный перпендикуляр  $\ell$  к  $BC$  проходит через центр  $\omega$ , значит, эта окружность симметрична относительно  $\ell$ . Так как точка  $A$  лежит на  $\omega$ , то и  $D$  также на ней лежит.

Итак, через сутки все отмеченные точки лежат на  $\omega$ . Но любая прямая пересекает  $\omega$  не более, чем по двум различным точкам; значит, на ней не найдётся трёх отмеченных точек. Противоречие.

**Комментарий.** Указано без доказательства, что все отмеченные точки лежат либо на одной окружности, либо на одной прямой — 2 балла.

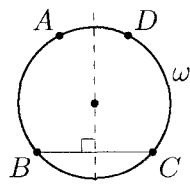


Рис. 1

9.7. Найдите все тройки простых чисел  $p, q, r$  такие, что четвёртая степень любого из них, уменьшенная на 1, делится на произведение двух остальных.

(В Сендеров)

**Ответ.** 2, 3, 5.

**Решение.** Ясно, что любые два числа тройки различны (если  $p = q$ , то  $p^4 - 1$  не делится на  $q$ ). Пусть для определённости  $p$  — наименьшее из чисел тройки. Нам известно, что число  $p^4 - 1 = (p - 1)(p + 1)(p^2 + 1)$  делится на  $qr$ . Заметим, что  $p - 1$  меньше любого из простых чисел  $q$  и  $r$ , а значит, взаимно просто с ними. Далее, число  $p^2 + 1$  не может делиться на оба числа  $q$  и  $r$ , так как  $p^2 + 1 < (p + 1)(p + 1) < qr$ . Значит,  $p + 1$  делится на одно из них (для определённости, на  $q$ ). Поскольку  $q > p$ , это возможно лишь при  $q = p + 1$ . Тогда одно из чисел  $p$  и  $q$  чётно, а поскольку оно простое, то  $p = 2, q = 3$ . Наконец,  $r$  является простым делителем числа  $p^4 - 1 = 15$ , отличным от  $q = 3$ , значит,  $r = 5$ .

Осталось проверить, что тройка 2, 3, 5 удовлетворяет условиям задачи.

**Комментарий.** Только правильный ответ — 1 балл.

Идея выбора наименьшего  $p$  из трех простых чисел для исследования делимости  $p^4 - 1$  на  $qr$  оценивается в 1 балл.

При верном решении отсутствует указание на необходимость проверки того, что полученная тройка подходит — снимается 1 балл.

9.8. Прямую палку длиной 2 метра распилили на  $N$  палочек, дли-

на каждой из которых выражается целым числом сантиметров. При каком наименьшем  $N$  можно гарантировать, что, используя все получившиеся палочки, можно, не ломая их, сложить контур некоторого прямоугольника?

(А Магазинов)

**Ответ.**  $N = 102$ .

**Решение. Первое решение.** Пусть  $N \leq 101$ . Распилим палку на  $N - 1$  палочки длиной 1 см и одну палочку длиной  $(201 - N)$  см. Из полученного набора невозможно сложить прямоугольник, так как каждая из сторон прямоугольника меньше полупериметра и, следовательно, палочка длиной  $201 - N \geq 100$  см не может быть частью никакой стороны. Таким образом,  $N \geq 102$ .

Покажем, что при  $N = 102$  искомый прямоугольник найдется. Для этого заметим, что среди всех палочек найдутся две длиной по 1 см. В самом деле, если бы это было не так, то суммарная длина палочек была бы не меньше  $2 \cdot 101 + 1 = 203$  см, что неверно.

Отложим эти две палочки. Пусть длины оставшихся палочек равны  $a_1, a_2, \dots, a_{100}$  см, тогда имеем  $a_1 + a_2 + \dots + a_{100} = 198$ . Среди 100 чисел  $A_1 = a_1, A_2 = a_1 + a_2, A_3 = a_1 + a_2 + a_3, \dots, A_{100} = a_1 + a_2 + \dots + a_{100}$  найдутся два, дающие одинаковый остаток от деления на 99. Пусть это  $A_k$  и  $A_\ell, k < \ell$ . Число  $A_\ell - A_k$  строго больше нуля и строго меньше 198, при этом оно делится на 99. Значит,  $A_\ell - A_k = 99 = a_{k+1} + a_{k+2} + \dots + a_\ell$ .

Тем самым, мы нашли несколько палочек суммарной длины 99 см. Отложим и их. Оставшиеся палочки также имеют суммарную длину 99 см. Таким образом, нам удастся сложить прямоугольник  $1 \times 99$  см.

**Второе решение.** Предъявим другое доказательство того, что при  $N = 102$  сложить прямоугольник удастся.

Обозначим длины палочек набора, выраженные в сантиметрах, через  $a_1, a_2, \dots, a_{102}$ . Имеем  $a_1 + a_2 + \dots + a_{102} = 200$ . Рассмотрим окружность длины 200 и разобьём её 102 красными точками на дуги длины  $a_1, a_2, \dots, a_{102}$ . Эти точки являются некоторыми 102 вершинами правильного 200-угольника  $T$ , вписанного в эту окружность. Вершины  $T$  разбиваются на пары

противоположных. Таких пар 100, а красных точек — 102, значит, среди красных точек найдутся две пары противоположных.

Эти две пары точек делят окружность на две пары равных дуг. Таким образом, мы разбили все палочки на четыре группы  $A, B, C, D$ , причём суммарные длины в группах  $A$  и  $C$ , а также в группах  $B$  и  $D$  равны. Значит, можно составить прямоугольник, используя каждую группу для составления одной его стороны.

**Комментарий.** Только верный ответ — 0 баллов.

Приведён пример, показывающий, что  $N \geq 102 - 1$  балл.

Доказано, что  $N = 102$  подходит, но не обоснована его минимальность — 5 баллов.

## 10 класс

- 10.5. Найдите все числа  $a$  такие, что для любого натурального  $n$  число  $an(n+2)(n+3)(n+4)$  будет целым. (О. Подлипский)

**Ответ.**  $a = \frac{k}{6}$ , где  $k$  — любое целое число.

**Решение.** Подставив  $n = 1, n = 3$  и  $n = 4$ , получаем, что числа  $60a, 630a$  и  $24 \cdot 56a$  — целые. Значит,  $a$  — рациональное число, знаменатель  $q$  которого в несократимой записи является делителем чисел 60, 630 и  $24 \cdot 56$ . Следовательно, их наибольший общий делитель также делится на  $q$ . Поскольку  $\text{НОД}(60, 630) = 30$ , а  $24 \cdot 56$  не делится на 5, то  $q$  — делитель числа 6, и  $a = k/6$  при некотором целом  $k$ .

Осталось показать, что все числа такого вида подходят. Действительно, одно из трёх последовательных чисел  $n+2, n+3, n+4$  делится на 3, а одно из последовательных чисел  $n+2, n+3$  делится на 2; значит,  $n(n+2)(n+3)(n+4)$  делится на 2 и на 3, а значит, и на 6. Поэтому  $an(n+2)(n+3)(n+4) = k \frac{n(n+2)(n+3)(n+4)}{6}$  — целое число.

**Комментарий.** Доказано, что любое число указанного вида подходит — 2 балла.

Доказано, что число  $a$  обязано иметь указанный вид — 4 балла.

Только правильный ответ — 1 балл (этот балл не суммируется с другими).

- 10.6. На доску выписаны 2011 чисел. Оказалось, что сумма любых трёх выписанных чисел также является выписанным числом. Какое наименьшее количество нулей может быть среди этих чисел? (И. Богданов)

**Ответ.** 2009.

**Решение.** Положим  $n = 2011$ . Упорядочим выписанные числа в неубывающем порядке:  $a_1 \leq a_2 \leq \dots \leq a_n$ . Поскольку число  $a_1 + a_2 + a_3$  выписано, то  $a_1 + a_2 + a_3 \geq a_1$ , откуда  $a_2 + a_3 \geq 0$ . Аналогично получаем  $a_{n-2} + a_{n-1} + a_n \leq a_n$ , откуда  $a_{n-2} + a_{n-1} \leq 0$ . Итак,  $0 \geq a_{n-2} + a_{n-1} \geq a_2 + a_3 \geq 0$ ; значит,  $a_2 + a_3 = a_{n-2} + a_{n-1} = 0$ . Так как  $a_2 \leq a_3 \leq a_{n-2} \leq a_{n-1}$ ,

отсюда вытекает, что  $a_2 = a_3 = a_{n-2} = a_{n-1}$ , а значит,  $a_2 = a_3 = \dots = a_{n-1} = 0$ . Итак, среди выписанных чисел хотя бы 2009 нулей.

Пример из 2009 нулей и чисел 1,  $-1$  показывает, что нулей может быть ровно 2009.

**Комментарий.** Только ответ — 0 баллов.

Приведён пример, показывающий, что нулей может быть ровно 2009 — 1 балл.

Доказано только, что нулей должно быть не меньше 2009 — 5 баллов.

Показано только, что  $a_2 + a_3 \geq 0$  (или  $a_{n-1} + a_{n-2} \leq 0$ ) — 1 балл.

Показано только, что среди выписанных чисел не более двух положительных и/или не более двух отрицательных — 3 балла

10.7. В неравностороннем остроугольном треугольнике  $ABC$  точки  $C_0$  и  $B_0$  — середины сторон  $AB$  и  $AC$  соответственно,  $O$  — центр описанной окружности,  $H$  — точка пересечения высот. Прямые  $BH$  и  $OC_0$  пересекаются в точке  $P$ , а прямые  $CH$  и  $OB_0$  — в точке  $Q$ . Оказалось, что четырехугольник  $OPHQ$  — ромб. Докажите, что точки  $A$ ,  $P$  и  $Q$  лежат на одной прямой.

(Л. Емельянов)

**Решение.** Положим  $a = BC$ ,  $b = CA$ ,  $c = AB$ ,  $\alpha = \angle BAC$ ; тогда  $AB' = c \cos \alpha$ ,  $AC' = b \cos \alpha$ . Пусть  $BB'$  и  $CC'$  — высоты треугольника. Так как  $OB_0$  и  $OC_0$  — серединные перпендикуляры к сторонам  $AC$  и  $AB$ , то отрезки  $B'B_0$  и  $C'C_0$  равны высотам ромба  $OPHQ$ , значит,  $B'B_0 = C'C_0$ , откуда  $|AB_0 - AB'| = |AC_0 - AC'|$ , или

$$\left| \frac{b}{2} - c \cos \alpha \right| = \left| \frac{c}{2} - b \cos \alpha \right|. \quad (*)$$

В случае, если в левой и правой частях модули раскрываются с одним знаком, имеем  $\frac{b}{2} - c \cos \alpha = \frac{c}{2} - b \cos \alpha$ , т.е.  $b \left( \frac{1}{2} + \cos \alpha \right) = c \left( \frac{1}{2} + \cos \alpha \right)$ . По условию  $\alpha < 90^\circ$ , поэтому  $\cos \alpha > 0$  и, значит,  $b = c$ , что противоречит условию.

Предположим теперь, что модули в равенстве (\*) раскрываются с разными знаками, скажем,  $\frac{b}{2} - c \cos \alpha > 0$  и  $\frac{c}{2} - b \cos \alpha < 0$

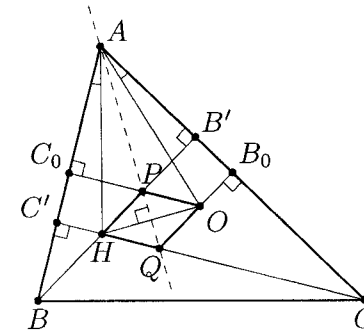


Рис. 2

(геометрически это означает, что точка  $B'$  лежит между  $A$  и  $B_0$ , а точка  $C_0$  — между  $A$  и  $C'$ , см. рис. 2). Тогда  $\frac{b}{2} - c \cos \alpha = b \cos \alpha - \frac{c}{2}$ , или  $\frac{b+c}{2} = (b+c) \cos \alpha$ , откуда  $\cos \alpha = \frac{1}{2}$ . Таким образом,  $\alpha = 60^\circ$ .

Тогда  $AC' = b \cos \alpha = \frac{b}{2} = AB_0$ , значит, точки  $B_0$  и  $C'$  симметричны относительно биссектрисы угла  $BAC$ . Тогда прямые  $OB_0$  и  $CC'$  также симметричны, и их точка пересечения  $Q$  лежит на биссектрисе угла  $BAC$ . Аналогично, точка  $P$  лежит на биссектрисе угла  $BAC$ .

**Замечание.** Для всевозможных неравносторонних треугольников параллелограмм  $OPHQ$  является ромбом только при  $\angle BAC = 60^\circ$  или  $\angle BAC = 120^\circ$ . В последнем случае точки  $A$ ,  $P$  и  $Q$  также лежат на одной прямой.

**Комментарий.** Показано только, что в любом треугольнике  $OPHQ$  — параллелограмм — 0 баллов.

Доказано, что  $B'B_0 = C'C_0$  — 1 балл.

Не рассмотрена возможность раскрытия модулей с разными знаками (в геометрических терминах — не рассмотрен случай, когда одна из точек  $B'$ ,  $C'$  лежит внутри, а другая — вне отрезка от  $A$  до середины соответствующей стороны) — ставится не более 1 балла за всю задачу.

Из условия выведено, что  $\angle BAC = 60^\circ$  — 4 балла.

10.8. Прямую палку длиной 2 метра распилили на  $N$  палочек, длина каждой из которых выражается целым числом сантиметров.

При каком наименьшем  $N$  можно гарантировать, что, используя все получившиеся палочки, можно, не ломая их, сложить контур некоторого прямоугольника? (А. Магазинов)

**Ответ.**  $N = 102$ .

**Решение. Первое решение.** Пусть  $N \leq 101$ . Распилим палку на  $N - 1$  палочки длиной 1 см и одну палочку длиной  $201 - N$  см. Из полученного набора невозможно сложить прямоугольник, так как каждая из сторон прямоугольника меньше полупериметра и, следовательно, палочка длиной  $201 - N \geq 100$  см не может быть частью никакой стороны. Таким образом,  $N \geq 102$ .

Покажем, что при  $N = 102$  искомый прямоугольник найдется. Для этого заметим, что среди всех палочек найдутся две длиной по 1 см. В самом деле, если бы это было не так, то суммарная длина палочек была бы не меньше  $2 \cdot 101 + 1 = 203$  см, что неверно.

Отложим эти две палочки. Пусть длины оставшихся палочек равны  $a_1, a_2, \dots, a_{100}$  см, тогда имеем  $a_1 + a_2 + \dots + a_{100} = 198$ . Среди 100 чисел  $A_1 = a_1, A_2 = a_1 + a_2, A_3 = a_1 + a_2 + a_3, \dots, A_{100} = a_1 + a_2 + \dots + a_{100}$  найдутся два, дающие одинаковый остаток от деления на 99. Пусть это  $A_k$  и  $A_\ell, k < \ell$ . Число  $A_\ell - A_k$  строго больше нуля и строго меньше 198, при этом оно делится на 99. Значит,  $A_\ell - A_k = 99 = a_{k+1} + a_{k+2} + \dots + a_\ell$ .

Тем самым, мы нашли несколько палочек суммарной длины 99 см. Отложим и их. Оставшиеся палочки также имеют суммарную длину 99 см. Таким образом, нам удастся сложить прямоугольник  $1 \times 99$  см.

**Второе решение.** Предъявим другое доказательство того, что при  $N = 102$  сложить прямоугольник удастся.

Обозначим длины палочек набора, выраженные в сантиметрах, через  $a_1, a_2, \dots, a_{102}$ . Имеем  $a_1 + a_2 + \dots + a_{102} = 200$ . Рассмотрим окружность длины 200 и разобьём её 102 красными точками на дуги длины  $a_1, a_2, \dots, a_{102}$ . Эти точки являются некоторыми 102 вершинами правильного 200-угольника  $T$ , вписанного в эту окружность. Вершины  $T$  разбиваются на пары

противоположных. Таких пар 100, а красных точек — 102, значит, среди красных точек найдутся две пары противоположных.

Эти две пары точек делят окружность на две пары равных дуг. Таким образом, мы разбили все палочки на четыре группы  $A, B, C, D$ , причём суммарные длины в группах  $A$  и  $C$ , а также в группах  $B$  и  $D$  равны. Значит, можно составить прямоугольник, используя каждую группу для составления одной его стороны.

**Комментарий.** Только верный ответ — 0 баллов.

Приведён пример, показывающий, что  $N \geq 102 - 1$  балл.

Доказано, что  $N = 102$  подходит, но не обоснована его минимальность — 5 баллов.

## 11 класс

- 11.5. Найдите все числа  $a$  такие, что для любого натурального  $n$  число  $an(n+2)(n+3)(n+4)$  будет целым. (О. Подлипский)

**Ответ.**  $a = \frac{k}{6}$ , где  $k$  — любое целое число.

**Решение.** Подставив  $n = 1$ ,  $n = 3$  и  $n = 4$ , получаем, что числа  $60a$ ,  $630a$  и  $24 \cdot 56a$  — целые. Значит,  $a$  — рациональное число, знаменатель  $q$  которого в несократимой записи является делителем чисел  $60$ ,  $630$  и  $24 \cdot 56$ . Следовательно, их наибольший общий делитель также делится на  $q$ . Поскольку  $\text{НОД}(60, 630) = 30$ , а  $24 \cdot 56$  не делится на  $5$ , то  $q$  — делитель числа  $6$ , и  $a = k/6$  при некотором целом  $k$ .

Осталось показать, что все числа такого вида подходят. Действительно, одно из трёх последовательных чисел  $n+2$ ,  $n+3$ ,  $n+4$  делится на  $3$ , а одно из последовательных чисел  $n+2$ ,  $n+3$  делится на  $2$ ; значит,  $n(n+2)(n+3)(n+4)$  делится на  $2$  и на  $3$ , а значит, и на  $6$ . Поэтому  $an(n+2)(n+3)(n+4) = k \frac{n(n+2)(n+3)(n+4)}{6}$  — целое число.

**Комментарий.** Доказано, что любое число указанного вида подходит — 2 балла.

Доказано, что число  $a$  обязано иметь указанный вид — 4 балла.

Только правильный ответ — 1 балл (этот балл не суммируется с другими).

- 11.6. Остроугольный треугольник  $ABC$  вписан в окружность  $\omega$ . Касательные к  $\omega$ , проведенные через точки  $B$  и  $C$ , пересекают касательную к  $\omega$ , проведенную через точку  $A$ , в точках  $K$  и  $L$  соответственно. Прямая, проведенная через  $K$  параллельно  $AB$ , пересекается с прямой, проведенной через  $L$  параллельно  $AC$ , в точке  $P$ . Докажите, что  $BP = CP$ . (П. Кожевников)

**Решение. Первое решение.** Докажем, что точка  $P$  лежит на серединном перпендикуляре к отрезку  $BC$ . Пусть  $O$  — центр окружности  $\omega$ , а  $X$  — точка пересечения прямых  $BC$  и  $PL$  (см. рис. 3). Так как  $O$  лежит на серединном перпендикуляре к отрезку  $BC$ , достаточно доказать, что  $OP \perp BC$ .

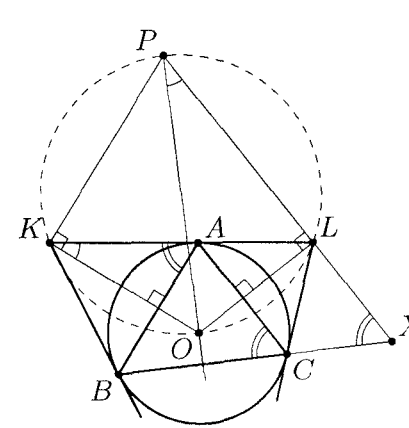


Рис. 3

Точки  $A$  и  $B$  симметричны относительно прямой  $OK$ , поэтому  $OK \perp AB \parallel KP$ . Аналогично  $OL \perp LP$ . Поскольку  $\angle OKP = \angle OLP = 90^\circ$ , четырехугольник  $OKPL$  вписанный, откуда  $\angle OPL = \angle OKL$ . Из касания вытекает, что  $\angle KAB = \angle ACB = \angle PXB$ . Таким образом,  $\angle OPX + \angle PXB = \angle OKL + \angle KAB = 90^\circ$ , что и требовалось доказать.

**Второе решение.** Пусть прямые  $BK$  и  $CL$  пересекаются в точке  $M$  (см. рис. 4). Поскольку треугольник  $ABK$  равнобедренный, имеем  $\angle PKA = \angle BAK = \frac{1}{2}(180^\circ - \angle AKB)$ . Значит,  $KP$  — биссектриса внешнего угла при вершине  $K$  треугольника  $KLM$ . Аналогично,  $LP$  — биссектриса внешнего угла при вершине  $L$ . Тогда  $P$  — центр вневписанной окружности этого треугольника, касающейся стороны  $KL$ , поэтому  $P$  лежит на биссектрисе угла  $M$ . Поскольку  $MB = MC$ , точки  $B$  и  $C$  симметричны относительно этой биссектрисы. Значит, и отрезки  $PB$  и  $PC$  также симметричны и потому равны.

**Комментарий.** Доказано, что четырехугольник  $OKPL$  вписанный — 2 балла.

- 11.7. Вася нарисовал на плоскости несколько окружностей и провёл всевозможные общие касательные к каждой паре этих окружностей. Оказалось, что проведённые прямые содержат все сторо-

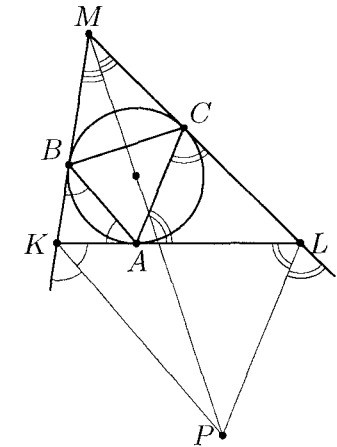


Рис. 4

ны некоторого правильного 2011-угольника. Какое наименьшее количество окружностей мог нарисовать Вася? (Н. Агаханов)

**Ответ.** 504.

**Решение.** Обозначим полученный правильный 2011-угольник через  $M$ , его вершины (по часовой стрелке) — через  $X_1, X_2, \dots, X_{2011}$ , его вписанную окружность через  $\omega$ , а его центр — через  $O$ . Назовём прямые, содержащие стороны многоугольника, выделенными.

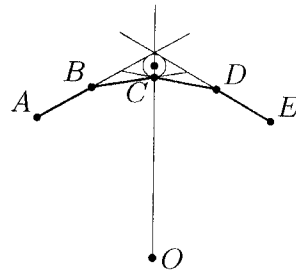


Рис. 5

Заметим, что для любых пяти последовательных вершин  $A, B, C, D, E$  многоугольника  $M$  существует окружность, отличная от  $\omega$ , касающаяся прямых  $AB, BC, CD$  и  $DE$  (см. рис. 5). Действительно, вершины  $A$  и  $E$ , а также  $B$  и  $D$  симметричны относительно прямой  $CO$ . Тогда точка пересечения внешней биссектрисы угла  $ABC$  с прямой  $CO$  отлична от  $O$  и равноудалена от прямых  $AB, BC, CD$  и  $DE$ , а значит, является центром искомой окружности. Теперь, если Вася нарисует 503 такие окружности для точек  $(X_1, X_2, X_3, X_4, X_5), (X_5, X_6, X_7, X_8, X_9), \dots, (X_{2009}, X_{2010}, X_{2011}, X_1, X_2)$ , а также окружность  $\omega$ , то любая выделенная прямая будет общей касательной к двум проведённым окружностям. Итак, 504 окружностей достаточно.

Осталось доказать, что окружностей должно быть не менее 504. Каждой выделенной прямой должны касаться хотя бы две окружности. Окружность  $\omega$  касается всех 2011 этих прямых. У любой другой окружности есть не более четырёх общих касательных с  $\omega$ ; значит, она касается не более четырёх выделенных прямых. Итак, если окружностей  $n$ , то всего происходит не более, чем  $2011 + 4(n - 1)$  касаний окружности с выделенными прямыми; с другой стороны, их должно быть не меньше  $2011 \cdot 2 = 4022$ . Итак,  $2011 + 4(n - 1) \geq 2 \cdot 2011$ , откуда  $n \geq 2011/4 + 1 > 503$ , что и требовалось доказать.

**Комментарий.** Только ответ — 0 баллов.

Показано только, что 504 окружностей достаточно — 2 балла.

Показано только, что 503 окружностей недостаточно — 4 балла.

11.8. Даны положительные числа  $b$  и  $c$ . Докажите неравенство

$$(b - c)^{2011} (b + c)^{2011} (c - b)^{2011} \geq (b^{2011} - c^{2011})(b^{2011} + c^{2011})(c^{2011} - b^{2011}).$$

(В. Сендеров)

**Решение. Лемма.** Для любых вещественных  $x \geq y \geq 0$  и натурального  $n$  верно неравенство

$$x^n - y^n \geq (x - y)^n.$$

**Доказательство.** Пусть  $x = y + t, t \geq 0$ . Раскрывая  $x^n = (y + t)^n$  по биному Ньютона, имеем  $x^n = y^n + \dots + t^n \geq y^n + t^n$ , или  $x^n - y^n \geq t^n$ . Лемма доказана.  $\square$

Без ограничения общности можно считать, что  $b \geq c$ . Обозначим  $n = 2011$ . Применим лемму к числам  $b, c$ , а также к числам  $b^2, c^2$ ; мы получим

$$b^n - c^n \geq (b - c)^n,$$

$$(b^n - c^n)(b^n + c^n) = (b^2)^n - (c^2)^n \geq (b^2 - c^2)^n = (b - c)^n (b + c)^n.$$

Перемножив полученные неравенства, получаем неравенство

$$(b^n - c^n)(b^n + c^n)(b^n - c^n) \geq (b - c)^n (b + c)^n (b - c)^n.$$

Поскольку  $b^n - c^n = -(c^n - b^n)$  и  $(b - c)^n = -(c - b)^n$ , полученное неравенство равносильно требуемому.